(Ova stranica je ostavljena prazna)

FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH
DIFERENCIJALNI RAČUN

§ 1. Funkcije više promenljivih

2953. Izraziti zapreminu konusa kao funkciju njegove izvodnice x i visine y.

2954. Izraziti površinu trougla kao funkciju njegovih strana x, y, z.

2955. Sastaviti tablicu vrednosti funkcije $z=2x-3y+1$, dajući nezavisno promenljivim vrednosti celih brojeva iz intervala [0, 5].

2956. Sastaviti tablicu vrednosti funkcije $z=\sqrt{x^2+y^2}$, dajući nezavisno promenljivim vrednosti: 0; 0,1; 0,2; . . . ; 1; vrednosti funkcije računati sa tačnošću do 0,1.

2957. Naći vrednosti funkcija:

1) $z=\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2$ za $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$;

2) $z=e^{\sin(x+y)}$ za $x=y=\dfrac{\pi}{2}$;

3) $z=y^{x^2-1}+x^{y^2-1}$ za $x=2,\ y=2;\quad x=1,\ y=2;\quad x=2,\ y=1.$

2958. Ako je

$$F(x,\ y)=\frac{\varphi(x)\,\psi(y)-\psi(x)\,\varphi(y)}{\varphi(xy)\,\psi(xy)},$$

naći $F\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$. Specijalno uzeti: $\varphi(u)=u^3$, $\psi(u)=u^2$ i izračunati $F\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$.

2959. Neka je: $F(x,\ y)=y^x-\dfrac{1}{2}x^y$. Ako se x i y menjaju istom brzinom, koja će funkcija za $x=3$, $y=2$ rasti brže: da li ona koja se dobija iz F pri konstantnom y (kad se menja samo x), ili ona koja se dobija pri konstantnom x (menja se samo y)?

2960. Neka je $\varphi(x,\ y,\ z)=y^2-(y\cos z+z\cos y)\,x+x^{\frac{y+z}{y-z}}$ i neka promenljive y i z zadržavaju fiksne vrednosti y_0 i z_0, pri čemu je $y_0=3z_0$. Šta predstavlja grafik funkcije $v=\varphi(x,\ y_0,\ z_0)$? Da li je $\varphi(x,\ y,\ z)$: 1) racionalna funkcija od y? od z? 2) cela funkcija od x?

2961*. Za funkciju $z=f(x, y)$ koja zadovoljava identički relaciju

$$f(mx, my)=m^k f(x, y) \quad \text{za svako } m,$$

kaže se da je homogena funkcija k-tog stepena homogenosti. Pokazati da se homogena funkcija $z=f(x, y)$ k-tog stepena homogenosti može uvek predstaviti u obliku $z=x^k F\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

2962. Homogenost funkcije od ma koliko nezavisno promenljivih definiše se slično funkciji dve promenljive; naprimer: $f(x, y, z)$ je homogena funkcija k-tog stepena homogenosti ako je

$$f(mx, my, mz)=m^k f(x, y, z) \quad \text{za svako } m.$$

Dokazati da važi relacija

$$f(x, y, z)=x^k F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

2963. Pokazati da funkcije $F(x, y)=xy$ zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$F(ax+bu, cy+dv)=acF(x, y)+bcF(u, y)+adF(x, v)+bdF(u, v).$$

2964. Pokazati da funkcija $F(x, y)=\ln x \cdot \ln y$ zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$F(xy, uv)=F(x, u)+F(x, v)+F(y, u)+F(y, v)$$

(x, y, u, v uzimaju pozitivne vrednosti).

2965. Koliko (jednoznačnih i neprekidnih) funkcija z definiše jednačina

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1?$$

2966. Data je posredna funkcija $z=u^v$, pri čemu je $u=x+y$, $v=x-y$. Naći vrednost funkcije z za: 1) $x=0$, $y=1$; 2) $x=1$, $y=1$; 3) $x=2$, $y=3$; 4) $x=0$, $y=0$; 5) $x=-1$, $y=-1$.

2967. $z=\dfrac{u+v}{uv}$; $u=w^t$; $v=w^{-t}$; $w=\sqrt{x+y}$; $t=2(x-y)$.

Izraziti z kao funkciju neposredno od x i y. Da li je z racionalna funkcija od u i v? od w i t? od x i y?

2968. Data je posredna funkcija $z=u^w+w^{u+v}$, pri čemu je $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy$. Izraziti z kao funkciju neposredno od x i y.

2969. $u=(\xi+\eta)^2-\xi^3-\eta^3$; $\xi=\dfrac{e^\omega+e^\varphi}{2}$; $\eta=\dfrac{e^\omega-e^\varphi}{2}$; $\omega=\ln(x^2+y^2+z^2)$; $\varphi=2\ln(x+y+z)$. Izraziti u kao funkciju neposredno od x, y i z. Da li je u cela racionalna funkcija od ξ i η? od ω i φ? od x, y, z?

2970. Funkciju

$$z=\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x-xy+y}\right)^{xy}+x^2+y^2$$

predstaviti u obliku „lanca“ zavisnosti koji se sastoji iz dve karike.

2971. Metodom preseka ispitati „grafik“, funkcije $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$. Šta predstavljaju preseci ravnima $x=\text{const}$? $y=\text{const}$? $z=\text{const}$?

2972. Metodom preseka ispitati „grafik“ funkcije $z=xy$. Šta predstavljaju preseci ravnima $x=\text{const}$? $y=\text{const}$? $z=\text{const}$?

2973. Metodom preseka ispitati „grafik“ funkcije $z=y^2-x^3$

2974. Metodom preseka ispitati „grafik“ funkcije $z^3=ax^2+by^2$ ($a>0$, $b>0$).

§ 2. Početno proučavanje funkcije

Oblast definisanosti

2975. Oblast koja leži unutar paralelograma, obrazovanog pravama: $y=0$, $y=2$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=\frac{1}{2}x-1$ prikazati pomoću nejednakosti.

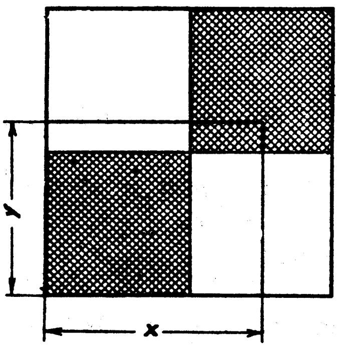
2976. Oblast ograničenu parabolama $y=x^2$ i $x=y^2$ (uključujući granice) definisati nejednakostima.

2977. Opisati pomoću nejednakosti otvorenu oblast, ograničenu jednakostraničnim trouglom stranice a, sa jednim temenom u koordinatnom početku, drugim — na pozitivnom delu x-ose, i trećim — u prvom kvadrantu.

2978. Oblast je ograničena beskonačnim kružnim cilindrom poluprečnika R (isključujući granice), čija je osa paralelna z-osi i prolazi kroz tačku (a, b, c); opisati ovu oblast pomoću nejednakosti.

2979. Oblast ograničenu sferom poluprečnika R sa centrom u tački (a, b, c) (uključujući granicu) definisati pomoću nejednakosti.

2980. Temena pravouglog trougla leže unutar kruga poluprečnika R. Površina S trougla je funkcija njegovih kateta x i y: $S=\varphi(x, y)$: naći: a) oblast definisanosti funkcije φ; b) oblast definisanosti odgovarajućeg analitičkog izraza.



Sl. 57

2981. U loptu poluprečnika R upisana je prava piramida sa pravougaonikom u osnovi. Zapremina V piramide je funkcija osnovnih ivica x i y. Hoće li ova funkcija biti jednoznačno definisana? Sastaviti njoj odgovarajući analitički izraz. i naći oblast definisanosti funkcije i pomenutog analitičkog izraza.

2982. Kvadratna daska se sastoji iz četiri kvadratna polja, dva crna i dva bela kao što je to prikazano na sl. 57; stranica svakog od njih ima dužinu 1. Uočimo pravougaonik čije su stranice x i y paralelne stranicama daske i čiji se jedan ugao poklapa sa njenim crnim uglom. Površina crnog dela ovog pravougaonika biće funkcija od x i y. Naći oblast definisanosti ove funkcije. Izraziti ovu funkciju analitički.

U zadacima 2983—3002 naći oblast definisanosti datih funkcija

2983. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

2984. $z=\ln(y^2-4x+8)$.

2985. $z=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$.

2986. $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

2987. $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

2988. $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$.

2989. $z=\ln xy$.

2990. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

2991. $z=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}+\operatorname{arcsec}(x^2+y^2)$.

2992. $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

2993. $z=\sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2994. $z=xy+\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

2995. $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$.

2996. $z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$.

2997. $z=\sqrt{x\sin y}$.

2998. $z=\operatorname{lm}x-\ln\sin y$.

2999. $z=\ln[x\ln(y-x)]$.

3000. $z=\arcsin[2y(1+x^2)-1]$.

3001. $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$.

3002. $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\quad(R>r)$.

Granična vrednost. Neprekidnost funkcije

U zadacima 3003—3008 izračunati granične vrednosti datih funkcija uzimajući da nezavisno promenljive na proizvoljan način teže svojim graničnim vrednostima.

3003. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

3004. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

3005. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

3006. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

3007. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$.

3008. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

3009. Uveriti se da funkcija $u=\frac{x+y}{x-y}$ kad $x\to 0$, $y\to 0$ može težiti svakoj graničnoj vrednosti (u zavisnosti od toga kako teže nuli x i y). Navesti primere takvih načina menjanja promenljivih x i y za koje je: 1) $\lim u=1$; 2) $\lim u=2$.

3010. Naći tačke prekida funkcije $z=\frac{2}{x^2+y^2}$. Kako se ponaša funkcija u okolini prekidnih tačaka?

3011. Naći prekidne tačke funkcije $z=\frac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$.

3012. U kojim će tačkama funkcija $z=\frac{1}{x-y}$ biti prekidna?

3013. U kojim će tačkama funkcija $z=\frac{1}{\sin\pi x}+\frac{1}{\sin\pi y}$ biti prekidna?

3014. U kojim će tačkama funkcija $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$ biti prekidna?

3015*. Ispitati kako stoji sa nepokretnošću datih funkcija za $x=0$, $y=0$:

1) $f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$. 2) $f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$.

3) $f(x, y)=\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$. 4) $f(x, y)=\frac{1}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$.

5) $f(x, y)=\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$; $f(0, 0)=0$. 6) $f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$; $f(0, 0)=0$.

Nivoske linije i površine

3016. Data je funkcija $z=\frac{1}{x^2+y^2}$; nacrtati nivoske linije ove funkcije za $z=1, 2, 3, 4$.

3017. Funkcija $f(x, y)$ definisana je ovako: njena vrednost u tački $P(x, y)$ jednaka je uglu pod kojim se iz ove tačke vidi dati odsečak AB u ravni Oxy, naći nivoske linije funkcije $f(x, y)$.

U zadacima 3018—3021 nacrtati nivoske linije datih funkcija dajući promenljivoj z vrednosti celih brojeva od -5 do $+5$.

3018. $z=xy$. **3019.** $z=x^2y+x$.

3020. $z=y(x^2+1)$. **3021.** $z=\frac{xy-1}{x^2}$.

3022. Nacrtati nivoske linije funkcije $z=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$, dajući promenljivoj z vrednosti od -1 do $\frac{3}{2}$ sa razmakom od $\frac{1}{2}$.

3023. Nacrtati nivoske linije funkcije z, definisane implicitno jednačinom $\left(\frac{3}{2}\right)^z [(x-5)^2+y^2] = \left(\frac{2}{3}\right)^z [(x+5)^2+y^2]$, dajući promenljivoj z celobrojne vrednosti od -4 do 4.

3024. Nacrtati nivoske linije funkcije z, zadate implicitno jednačinom $y^2 = 2^{-z}(x-z)$, dajući promenljivoj z vrednosti od -3 do 3 za razmakom od $\frac{1}{2}$.

3025. Naći nivoske linije funkcije z, definisane implicitno jednačinom $z + x \ln z + y = 0$.

3026. Data je tačka A u prostoru; odstojanje tačke M od tačke A je funkcija koordinata tačke M. Naći nivoske površine ove funkcije koje odgovaraju ocstojanjima od 1. 2, 3, 4 jedinice.

3027. Funkcija $u = f(x, y, z)$ definisana je ovako: njena vrednost u tački $P(x, y, z)$ jednaka je zbiru odstojanja ove tačke od dve date tačke $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$; šta su nivoske površine ove funkcije?

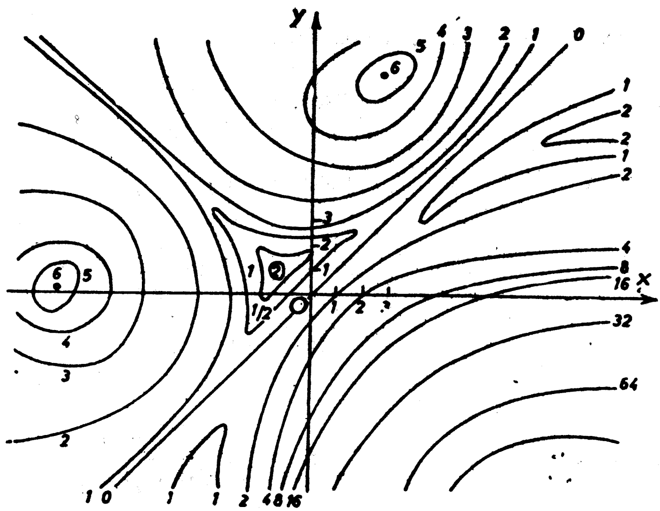
3028. Naći nivoske površi funkcije $u = \ln \frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3029. Naći nivoske površi funkcije $u = \frac{x^2+y^2}{z}$.

3030. Naći nivoske površi funkcija:

1) $u = 5^{2x+3y-z}$, 2) $u = \operatorname{tg}(x^2+y^2-2z^2)$.

3031. Na sl. 58 nacrtane su nivoske linije funkcije $z = f(x, y)$.



Sl. 58

Nacrtati grafike funkcija:

1) $z = f(x, 0)$; 2) $z = f(x, 4)$; 3) $z = f(1, y)$;

4) $z = f(-5, y)$; 5) $z = f(x, 3x)$; 6) $z = f(x, x^2)$.

§ 3. Izvodi i diferencijali funkcija više promenljivih

Parcijalni izvodi

3032. Zapremina gasa v je funkcija njegove temperature i pritiska: $v=f(p, T)$. Kad pritisak gasa ostaje konstantan, srednjim koeficijentom širenja gasa pri promeni njegove temperature od T_1 do T_2 naziva se veličina $\frac{v_2-v_1}{v(T_2-T_1)}$. Šta treba zvati koeficijentom širenja gasa pri konstantnom pritisku za datu temperaturu T_0?

3033. Temperatura θ u datoj tački A štapa Ox je funkcija apscise x tačke A i vremena t: $\theta=f(x, t)$. Kakav fizički smisao imaju parcijalni izvodi $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ i $\frac{\partial \theta}{\partial x}$?

3034. Površina S pravougaonika čija je osnovica b i visina h izražava se obrascem $S=bh$. Naći $\frac{\partial S}{\partial h}$ i $\frac{\partial S}{\partial x}$ i objasniti geometrijski smisao rezultata.

3035. Date su dve funkcije: $u=\sqrt{a^2-x^2}$ (a je konstanta) i $z=\sqrt{y^2-x^2}$. Naći $\frac{du}{dx}$ i $\frac{\partial z}{\partial x}$ i uporediti rezultate.

U zadacima 3036—3084 naći parcijalne izvode datih funkcija po svakoj od nezavisno promenljivih (x, y, z, u, v, t, φ i ψ su promenljive veličine).

3036. $z=x-y$.

3037. $z=x^3y-y^3x$.

3038. $\theta=axe^{-t}+bt$ (a, b su konstante).

3039. $z=\frac{u}{v}+\frac{v}{u}$.

3040. $z=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

3041. $z=(5x^2y-y^3+7)^3$.

3042. $z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

3043. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

3044. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

3045. $z=\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

3046. $z=x^y$.

3047. $z=\ln(x^2+y^2)$.

3048. $z=\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

3049. $z=\arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3050. $z=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

3051. $z=e^{-\frac{x}{y}}$.

3052. $z=\ln(x+\ln y)$.

3053. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{v+w}{v-w}$.

3054. $z = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$.

3055. $z = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$.

3056. $z = (1+xy)^y$.

3057. $z = xy\ln(x+y)$.

3058. $z = x^{xy}$.

3059. $u = xyz$.

3060. $u = xy + yz + zx$.

3061. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3062. $u = x^3 + yz^2 + 3\,yx - x + z$.

3063. $w = xyz + yzv + zvk + vxy$.

3064. $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

3065. $u = \sin(x^2+y^2+z^2)$.

3066. $u = \ln(x+y+z)$

3067. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

3068. $u = x^{yz}$.

3069. $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2+y^2}$ u tački (3, 4).

3070. $z = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$ u tački (1, 2).

3071. $z = (2x+y)^{2x+y}$.

3072. $z = (1+\log_y x)^3$.

3073. $z = xye^{\sin\pi xy}$.

3074. $z = (x^2+y^2)\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2-y^2}}$.

3075. $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^y}$.

3076. $z = 2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$.

3077. $z = \ln[xy^2 + yx^2 + \sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}]$.

3078. $z = \sqrt{1-\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\dfrac{x+y}{xy}$.

3079. $z = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} - 1}{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + 1} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

3080. $u = \dfrac{k}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

3081. $u = \operatorname{arctg}(x-y)^z$.

3082. $u = (\sin x)^{yz}$.

3083. $u = \ln\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3084. $w = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv) + \ln\cos(x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv)$.

3085. $n=\dfrac{\cos(\varphi-2\psi)}{\mathrm{sos}(\varphi+2\psi)}$. Naći $\left(\dfrac{\partial u}{\partial\psi}\right)_{\substack{\varphi=\frac{\pi}{4}\\ \psi=\pi}}$

3086. $u=\sqrt{az^3-bt^3}$. Naći $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ i $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ za $z=b,\ t=a$.

3087. $z=\dfrac{x\cos y-y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$. Naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ za $x=y=0$.

3088. $u=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$. Naći $\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{x=0\\ y=0\\ z=\frac{\pi}{4}}}$

3089. $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$. Naći $u'_x+u'_y+u'_z$ za $x=y=z=1$.

3090. $f(x,\ y)=x^3y-y^3x$. Naći $\left(\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}}\right)_{\substack{x=1\\ y=2}}$

3091. Koliki ugao zaklapa tangenta u tački (2, 4, 5) krive $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$ sa pozitivnim pravcem apscisne ose.

3092. Koliki ugao zaklapa tangenta krive $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ u tački $(1,\ 1,\ \sqrt{3})$ sa pozitivnim pravcem ordinatne ose.

3093. Pod kojim se uglom seku ravne krive po kojima ravan $y=2$ preseca površine $z=x^2+\dfrac{y^2}{6}$ i $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$?

Diferencijali. Približna računanja

U zadacima 3094—3097 naći parcijalne diferencijale datih funkcija po svakoj od nezavisno promenljivih.

3094. $z=xy^3-3x^2y^2+2y^4$.

3095. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3096. $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

3097. $u=\ln(x^3+2y^3-z^3)$.

3098. $z=\sqrt[3]{x+y^2}$. Naći $d_y z$ za $x=2,\ y=5,\ \Delta y=0{,}01$.

3099. $z=\sqrt{\ln xy}$. Naći $d_x z$ za $x=1,\ y=1,\ 2,\ \Delta x=0{,}016$.

3100. $u=p-\dfrac{qr}{p}+\sqrt{p+q+r}$. Naći $d_p u$ za $p=1,\ q=3,\ r=5,\ \Delta p=0{,}01$.

U zadacima 3101—3109 naći totalne diferencijale datih funkcija

3101. $z = x^2 y^4 - x^3 y^3 + x^4 y^3$.

3102. $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

3103. $z = \frac{x+y}{x-y}$.

3104. $z = \arcsin \frac{x}{y}$.

3105. $z = \sin(xy)$.

3106. $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

3107. $z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

3108. $z = \operatorname{arctg}(xy)$.

3109. $u = x^{yz}$.

Primene u približnom računu

3110. Naći vrednost totalnog diferencijala funkcije $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ za $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

3111. Naći vrednost totalnog diferencijala funkcije $z = e^{xy}$ za $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}15$, $\Delta y = 0{,}1$.

3112. Naći vrednost totalnog diferencijala funkcije $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ za $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}03$.

3113. Izračunati približno promenu funkcije $z = \frac{x + 3y}{y - 3x}$ koja odgovara promeni argumenata: x od $x_1 = 2$ do $x_2 = 2{,}5$ i y od $y_1 = 4$ do $y_2 = 3{,}5$.

3114. Izračunati prabližno $\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)$.

3115. Izračunati približno $1{,}04^{2{,}02}$.

3116. Naći dužinu odsečka prave $x = 2$, $y = 3$, koji leži između površine $z = x^2 + y^2$ i njene tangencijalne ravni u tački $(1, 1, 2)$.

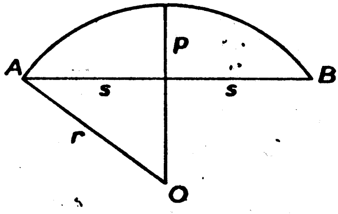
3117. Težina tela u vazduhu je $4{,}1 \pm 0{,}1$ *g* a u vodi $1{,}8 \pm 0{,}2$ *g*; Naći specifičnu težinu tela i odrediti granicu greške.

3118. Poluprečnik osnove konusa je $10{,}2 \pm 0{,}1$ *cm*, a izvodnica $44{,}6 \pm \pm 0{,}1$ *cm*; naći zapreminu konusa i odrediti granicu greške.

3119. Površina S trougla zadatog stranicom a i uglovima B i C izražava se obrascem: $S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B + C)}$; naći relativnu grešku izračunate vrednosti S ako su relativne greške podataka δ_a, δ_B, δ_C.

3120. Dužina strane trougla je 2,4 *m* i povećava se brzinom 10 *cm/sek*; dužina druge strane je 1,5 *m* i smanjuje se brzinom 5 *m/sek*; ugao između tih strana čija je početna vrednost 60°, raste brzinom od 2° u sekundi. Kako se, i kojom brzinom, menja površina trougla?

3121. U zarubljenom konusu poluprečnici osnova su $R=30$ *cm* i $r=20$ *cm*, a visina $h=40$ *cm*; za koliko se promeni zapremina konusa kad se poveća R za 3 *mm*, r za 4 *mm*, h za 2 *mm*?



Sl. 59

3122. Pokazati da je pri izračunavanju perioda T oscilovanja klatna po obrascu $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (l je dužina klatna, g — ubrzanje zemljine teže) relativna greška jednaka poluzbiru relativnih grešaka učinjenih pri određivanju veličina l i g (predpostavlja se da su sve greške male).

3123. Grešku dr koja se čini pri izračunavanju poluprečnika r kružnog luka AB (sl 59) pomoću tetive $2s$ i odstojanja p sredine luka od tetive — izraziti pomoću grešaka ds i dp; izračunati dr za $2s=19{,}45\ cm \pm 0{,}5\ mm$, $p=3{,}62\ cm \pm 0{,}3 mm$.

§ 4. Diferenciranje funkcija

Posredna funkcija

3124. $u=e^{x-2y}$, pri čemu je $x=\sin t$, $y=t^3$; $\dfrac{du}{dt}=?$

3125. $u=z^2+y^2+zy$, $z=\sin t$, $y=e^t$; $\dfrac{du}{dt}=?$

3126. $z=\arcsin(x-y)$, $x=3t$, $y=4t^3$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3127. $z=x^2y-y^2x$, gde je $x=u\cos v$, $y=u\sin v$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

3128. $z=x^2\ln y$, $x=\dfrac{u}{v}$, $y=3u-2v\cdot$ $\dfrac{\partial z}{du}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

3129. $u=\ln(e^x-e^y)$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=?$ Naći $\dfrac{du}{dx}$, Ako je $y=x^3$.

3130. $z=\operatorname{arctg}(xy)$; naći $\dfrac{dz}{dx}$, ako je $y=e^x$.

3131. $u=\arcsin\dfrac{x}{z}$, gde je $z=\sqrt{x^2+1}$; $\dfrac{du}{dx}=?$

3132. $z=\operatorname{tg}(3t+2x^2-y)$, $x=\dfrac{1}{t}$, $y=\sqrt{t}$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3133. $u=\dfrac{e^{ax}(x-z)}{a^2+1}$, $y=a\sin x$, $z=\cos x$; $\dfrac{du}{dx}=?$

3134. $z=\frac{xy\operatorname{arctg}(xy+x+y)}{x+y}$; $dz=?$

3135. $z=(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$ $dz=?$

3136. $z=f(x^2-y^2,\ e^{xy})$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

3137. Uveriti se da funkcija $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, u kojoj je $x=u+v$, $y=u-v$, zadovoljava relaciju

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{v^2+u^2}.$$

3138. Uveriti se da funkcija $z=\varphi(x^2+y^2)$, u kojoj je φ diferencijabilna funkcija, zadovoljava relaciju:

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

3139. $u=\sin x+F(\sin y-\sin x)$; uveriti se da je $\frac{\partial u}{\partial y}\cos x+\frac{\partial u}{\partial x}\cos y=$ $=\cos x\cos y$, ma kakva bila diferencijabilna funkcija F.

3140. $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$, uveriti se da je $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{y^2}$, ma kakva bila diferencijabilna funkcija f.

3141. Pokazati da homogena diferencijabilna funkcija $z=F\left(\frac{y}{x}\right)$ nultog stepena homogenosti (vidi zad. 2961) zadovoljava relaciju $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3142. Pokazati da homogena funkcija $u=x^kF\left(\frac{z}{x};\ \frac{y}{x}\right)$, k-tog stepena homogenosti, u kojoj je F diferencijabilna funkcija, zadovoljava relaciju

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=ku.$$

3143. Proveriti tvrđenje formulisano u zadatku 3142 na funkciji

$$u=x^5\sin\frac{z^2+y^2}{x^2}.$$

3144. Neka je funkcija $f(x, y)$ diferencijabilna. Dokazati da, ako se promenljive x i y zamene linearnim homogenim funkcijama promenljivih X i Y, onda je tako dobijena funkcija $F(X, Y)$ vezana sa funkcijom $f(x, y)$ sledećom relacijom:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=X\frac{\partial F}{\partial X}+Y\frac{\partial F}{\partial Y}.$$

Funkcije definisane implicitno i parametarski

U zadacima 3145—3155 naći izvod $\frac{dy}{dx}$ funkcija implicitno definisanil datim jednačinama.

3145. $x^3 y - y^3 x = a^4$. **3146.** $x^2 y^2 - x^4 - y^4 = a^4$.

3147. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$. **3148.** $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$.

3149. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$ **3150.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

3151. $xy - \ln y = a$. **3152.** $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$.

3153. $yx^2 = e^y$. **3154.** $ye^x + e^y = 0$. **3155.** $y^x = x^y$.

3156. $F(x, y) = F(y, x)$. Pokazati da se izvod funkcije y po x može izraziti razlomkom, čiji se brojitelj dobija iz imenitelja uzajamnom promenom mesta slovima x i y.

3157. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$; naći $\frac{dy}{dx}$ za $x = 6$, $y = 2$, i za $x = 6$ $y = 8$; dati geometrijsko tumačenje dobijenih rezultata.

3158. $x^4 y + xy^4 - ax^2 y^2 = a^5$; naći $\frac{dy}{dx}$ za $x = y = a$.

3159. Dokazati da iz $x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ proizilazi:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

3160. Pokazati da se iz $a + b(x+y) + cxy = m(x-y)$ dobija:

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{dy}{a+2by+cy^2}.$$

3161. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

3162. $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4x + 2z - 5 = 0$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

3163. $z^3 + 3xyz = a^3$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

3164. $e^z - xyz = 0$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

3165. Pokazati da za svaku diferencijabilnu funkciju φ, iz $\varphi(cx - az$ $cy - bz) = 0$ sledi:

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

3166. $F(x, y, z)=0$. Dokazati da je

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=1; \quad \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=-1.$$

3167. Naći totalni diferencijal funkcije z, definisane jednačinom $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$.

3168. Funkcija z definisana je parametarski: $x=u+v$, $y=u-v$, $z=uv$. Izraziti z kao eksplicitnu funkciju od x i y.

3169. $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$; izraziti z kao eksplicitnu funkciju od x i y.

3170. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=kv$. Izraziti z kao eksplicitnu funkciju od x i y.

U zadacima 3171—3174 naći $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ i dz za date funkcije.

3171. $x=\frac{u^2+v^2}{2}$, $y=\frac{u^2-v^2}{2}$, $z=uv$.

3172. $x=\sqrt{a}(\sin u+\cos v)$, $y=\sqrt{a}(\cos u-\sin v)$,
$z=1+\sin(u-v)$.

3173. $x=u+v$, $y=u-v$, $z=u^2 v^2$.

3174. $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$, $z=uv$.

3175. Jednačine $u=f(x, y)$, $v=F(x, y)$ u kojima su f i F diferencijabilne funkcije od x i y, definišu x i y kao diferencijabilne funkcije od u i v; dokazati da je

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)=1.$$

U zadacima 3176—3177 naći totalne diferencijale datih funkcija.

3176. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u^2$.

3177. $x=v\cos u-u\cos u+\sin u$, $y=v\sin u-u\sin u-\cos u$, $z=(u-v)^2$.

3178. Promenljive u i v su funkcije od x, y, z koje zadovoljavaju relacije $uv=3x-2y+z$, $v^2=x^2+y^2+z^2$. Pokazati da je

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

3179. Neka je $y=f(x, t)$ $F(x, y, t)=0$. Uveriti se da je

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

3180. Neka je $f(x, y, z)=0$, $F(x, y, z)=0$. Uveriti se da je

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

§ 5. Izvodi višeg reda

3181. $z=x^3+xy^2-5xy^3+y^5$. Uveriti se da je: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3182. $z=x^y$. Uveriti se da je $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3183. $z=e^x(\cos y+x\sin y)$. Uveriti se da je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

3184. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Uveriti se da je $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

U zadacima 3185—3192 naći $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, i $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ za date frnkcije.

3185. $z=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

3186. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

3187. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3188. $z=\sin^2(ax+by)$.

3189. $z=e^{xe^y}$.

3190. $z=\frac{x-y}{x+y}$.

3191. $z=y^{\ln x}$.

3192. $z=\arcsin(xy)$.

3193. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$; $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}=?$

3194. $z=e^{xy^2}$; $\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=?$

3195. $s=\ln(x^2+y^2)$; $\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=?$

3196. $z=\sin xy$; $\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=?$

3197. $w=e^{xyz}$; $\quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}=?$

3198. $v=x^m y^n z^p$; $\quad \frac{\partial^6 v}{\partial x \partial y^3 \partial z^2}=?$

3199. $z=\ln(e^x+e^y)$; uveriti se da je $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ i da je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2=0.$$

3200. $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$. Pokazati da je $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

3201. $u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; pokazati da je $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

3202. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; pokazati da je $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

3203. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; pokazati da je

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r},\quad \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}.$$

3204. Za koje vrednosti konstante a funkcija $v=x^3+axy^2$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0?$$

3205. $z=\frac{y}{y^2-a^2x^2}$; pokazati da je $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3206. $v=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}$; uveriti se da je

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}\right)=0.$$

3207. $z=f(x,y)$, $\xi=x+y$, $\eta=x-y$; uveriti se da je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}.$$

3208. $v=x\ln(x+r)-r$, gde je $r^2=x^2+y^2$. Uveriti se da je

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{1}{x+r}.$$

3209. Izvesti obrazac za drugi izvod $\frac{d^2 y}{dx^2}$ funkcije y, definisane implicitno jednačinom $f(x,y)=0$.

3210. $y=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$. Pokazati da je

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

ma kakve bile dvaput diferencijabilne funkcije φ i ψ.

3211. $u=\varphi(x)+\psi(y)+(x-y)\psi'(y)$. Uveriti se da je

$$(x-y)\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

(φ i ψ su dvaput diferencijabilne funkcije).

3212. $z = y\varphi(x^2-y^2)$. Uveriti se da je

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$$

(φ je diferencijabilna funkcija).

3213. $r = x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$; pokazati da je

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=0$$

(φ i ψ su dvaput diferencijabilne funkcije).

3214. $u=\frac{1}{y}[\varphi(ax+y)+\psi(ax-y)]$. Pokazaii da je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{a^2}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

3215. $u=\frac{1}{x}[\varphi(x-y)+\psi(x+y)]$. Pokazati da je

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

3216. $u=xe^y+ye^x$. Pokazati da je

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 y}{\partial y^3}=x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}.$$

3217. $u=e^{xyz}$. Pokazati da je

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x\partial y\partial z}=xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x\frac{\partial u}{\partial x}+u.$$

3218. $u=\ln\frac{x^2-y^2}{xy}$. Pokazati da je

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=2\left(\frac{1}{y^3}-\frac{1}{x^3}\right).$$

U zadacima 3219—3224 naći diferencijale drugog reda za date funkcije.

3219. $z=xy^2-x^2y$.

3220. $z=\ln(x-y)$.

3221. $z=\frac{1}{2(x^2+y^2)}$.

3222. $z=x\sin^2 y$.

3223. $z=e^{xy}$.

3224. $u=xyz$.

3225. $z=\sin(2x+y)$. Naći d^3z u tačkama $(0, \pi)$; $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3226. $u+\sin(x+y+z)$; $d^2u=?$

3227. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $d^2z=?$

3228. $z^3-3xyz=a^3$; $d^2z=?$

3229. $3x^2y^2+2z^2xy-2zx^3+4zy^3-4=0$. Naći d^2z u tački $(2, 1, 2)$.

Zamena promenljivih

3230. Transformisati diferencijalni izraz $x^4\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}+y$ na novu nezavisno promenljivu stavljajući $x=\frac{1}{t}$.

3231. Transformisati diferencijalni izraz $x^2y''-4xy'+y$ na novu nezavisno promenljivu stavljajući $x=e^z$.

3232. Transformisati diferencijalni izraz $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ay$ stavljajući $x=\sin t$.

3233. Transformisati diferencijalni izraz $\frac{y''}{y'^3}+y$ smatrajući y nezavisno promenljivom, a x funkcijom od y.

3234. Transformisati izraz $y'y'''-3y''^2$ uzimajući y za nezavisno promenljivu.

3235. Transformisati izraz $yy''-2(y^2+y'^2)$ uvodeći novu funkciju v smenom $y=\frac{1}{v}$.

3236. Transformisati na polarne koordinate jeenačinu $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$.

3237. Izraz

$$k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

transformisati na polarne koordinate ρ i φ imajući u vidu da je $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

3238. Funkcija z zavisi od x i y; u izrazu $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}$ izvršiti zamenu nezavisno promenljivih pomoću obrazaca $x=u\cos v$, $y=u\sin v$.

3239. Laplasov operator

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

transformisati na paralelne koordinate.

3240. Transformisati izraz

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+kz$$

uvodeći novu funkciju w shodno obrascu: $z=w(\sqrt{x^2+y^2})$ ili $z=w(r)$ pri čemu je $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

3241. U Izrazu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

nezavisno promenljive x i y zameniti promenljivima u i v, a funkciju z promenljivom w, uzimajući da su ove promenljive vezane obrascima:

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2};\quad z=\frac{u^2-v^2}{4}-w.$$

REZULTATI

2953. $z=\frac{\pi}{3}(x^2y-y^3)$.

2954. $S=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)}$.

2955.

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5
0	1	3	5	7	9	11
1	−2	0	2	4	6	8
2	−5	−3	−1	1	3	5
3	−8	−6	−4	−2	0	2
4	−11	−9	−7	−5	−3	−1
5	−14	−12	−10	−8	−6	−4

2956.

$y \backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,1	0,10	0,14	0,22	0.32	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,90	1,00
0,2	0,20	0,22	0,28	0,36	0,45	0,54	0,63	0,73	0,82	0,92	1,01
0,3	0,30	0,32	0,36	0,42	0,50	0,58	0,67	0,76	0,85	0,95	1,04
0,4	0,40	0,41	0,45	0,50	0,57	0,64	0,72	0,81	0,89	0,98	1,08
0,5	0,50	0,51	0,54	0,58	0,64	0,71	0,78	0,86	0,94	1,03	1,12
0,6	0,60	0.61	0,63	0,67	0,72	0,78	0,85	0,92	1,00	1,08	1,16
0,7	0,70	0,71	0,73	0,76	0,81	0,86	0,92	0,99	1,06	1,14	1,22
0,8	0,80	0,81	0,82	0,85	0,89	0,94	1,00	1,06	1,13	1,20	1,28
0,9	0,90	0,91	0,92	0,95	0,98	1,03	1,08	1,14	1,20	1,27	1,34
1	1,00	1,00	1,02	1,04	1,08	1,12	1,16	1,22	1,28	1,34	1,41

2957. 1) $\frac{9}{16}$; 2) 1; 3) 16; 2; 2. **2958.** $\frac{\varphi(a)\psi\left(\frac{1}{a}\right)-\psi(a)\varphi\left(\frac{1}{a}\right)}{\varphi(1)\psi(1)}$; $a-\frac{1}{a}$.

2959. Druga se funkcija menja brže. **2960.** Parabolu drugog reda; 1) nije; 2) nije.

2961. Staviti $m=\frac{1}{x}$.

2965. Jednačina definiše dve (jednoznačne i neprekidne) funkcije z.

2966. 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{1}{5}$; 4) nije definisana; 5) 1.

2967. $z=(x+y)^{x-y}+(x+y)^{y-x}$, $(x+y>0)$; z će biti racionalna funkcija od u i v ali ne i od w, t, x i y.

2968. $z=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$.

2969. $u=(x^2+y^2+z^2)^2-\frac{x^2+y^2+z^2}{4}[(x^2+y^2+z^2)^2+3(x+y+z)^4]$; u je cela racionalna funkcija od ξ i η, x, y i z, ali ne i od ω i φ.

2970. $z=\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^v+u$; $u=x^2+y^2$; $v=xy$

2971. $x=\text{const}$ — parabola; $y=\text{const}$ — parabola, $z=\text{const}\neq 0$ — hiperbola $z=0$ — dve prave.

2972. $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ — prave, $z=\text{const}\neq 0$ — hiperbola; $z=0$ — dve prave.

2973. $x=\text{const}$ — parabola; $y=\text{const}$ — kubna parabola; $z=\text{const}\neq 0$ — kriva trećeg stepena; $z=0$ — semikubna parabola.

2974. $z=\text{const}>0$ — elipsa; $x=\text{const}$ i $y=\text{const}$ — krive trećeg stepena za $x=0$ i $y=0$ — semikubna parabola).

2975. $0<y<2$; $-1<y-\frac{1}{2}x<0$. **2976.** $x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$.

2977. $0<y<x\sqrt{3}$; $y<(a-x)\sqrt{3}$. **2978.** $(x-a)^2+(y-b)^2<R^2$; $-\infty<z<\infty$.

2979. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2$.

2980. a) $x^2+y^2\leqslant 4R^2$; b) $-\infty<x<\infty$; $-\infty<y<\infty$.

2981. $v=\frac{1}{6}xy(2R\pm\sqrt{4R^2-x^2-y^2})$; funkcija nije jednoznačna. Oblast definisanosti funkcije je $x^2+y^2\leqslant 4R^2$; $x>0$, $y>0$. Oblast definisanosti analitičkog izraza je $x^2+y^2\leqslant 4R^2$.

2982.

Za $0\leqslant x\leqslant 1$,	$0\leqslant y\leqslant 1$	$S=xy$;
za $0\leqslant x\leqslant 1$,	$1\leqslant y$	$S=x$;
za $1\leqslant x$	$0\leqslant y\leqslant 1$	$S=y$;
za $1\leqslant x\leqslant 2$,	$1\leqslant y\leqslant 2$	$S=xy-x-y+2$;
za $1\leqslant x\leqslant 2$,	$2\leqslant y$	$S=x$;
za $2\leqslant x$,	$1\leqslant y\leqslant 2$	$S=y$;
za $2\leqslant x$,	$2\leqslant y$	$S=2$;

funkcija nije definisana za $x<0$ i $y<0$.

2983. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. **2984.** $y^2>4x-8$.

2985. Sva ravan izuzev tačaka kružne linije $x^2+y^2=R^2$.

2986. Unutrašnjost desnog pravog ugla koji obrazuju simetrale koordinatnih uglova, uključujući i odgovarajuće delove simetrale, tj.

$$x+y\geqslant 0,\ x-y\geqslant 0.$$

2987. Ista kao i u zad. 2986, samo bez tačaka na granici oblasti.

2988. Unutrašnjost desnog i levog ugla koje obrazuju prave $y=1+x$ i $y=1-x$, uključujući i te prave, ali bez njihove presečne tačke:

$$1-x\leqslant y\leqslant 1+x \quad (x>0),$$

$$1+x\leqslant y\leqslant 1-x \quad (x<0).$$

(za $x=0$ funkcija nije definisana).

2989. Unutrašnjost prvog i trećeg kvadranta.

2990. Zatvorena oblast između pozitivnog dela apscisne ose i parabole $y=x^2$ (isključujući i granicu):

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\ x^2\geqslant y.$$

2991. Prstenasta oblast između krugova $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=4$, uključujući i samo krugove: $1\leqslant x^2+y^2<4$.

2992. Deo ravni koji leži unutar parabole $y^2=4x$, između parabole i kruga $x^2+y^2=1$, uključujući luk parabole izuzev njegovog temena, i isključujući luk kruga.

2993. Deo ravni koji leži izvan krugova čiji su poluprečnici jednaki jedinici a centri su im u tačkama $(-1,\ 0)$ i $(1,\ 0)$; tačke prvog kruga pripadaju oblasti, tačke drugog ne pripadaju.

2994. Samo tačke kružne linije $x^2+y^2=R^2$.

2995. Sva ravan, izuzev pravih $x+y=n$ (n je ma koji ceo broj, pozitivan, negativan ili nula).

2996. Unutrašnjost kruga $x^2+y^2=1$ i prsten $2n\leqslant x^2+y^2\leqslant 2n+1$ (n je ceo broj), uključujući i granice.

2997. Ako je $x\geqslant 0$, onda je $2n\pi\leqslant y\leqslant(2n+1)\pi$, ako je $x<0$, onda je $(2n+1)\pi\leqslant y\leqslant(2n+2)\pi$, pri čemu je n ceo broj.

2998. $x>0;\ 2n\pi<y<2(n+1)\pi$ (n je ceo broj).

2999. Otvorena šrafirana oblast prikazana na sl. 83: za $x>0$ je $y>x+1$; za $x<0$ je $x<y<x+1$.

3000. Deo ravni između krive $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ i njene asimptote, uključujući i granicu.

3001. $x>0,\ y>0,\ z>0$.

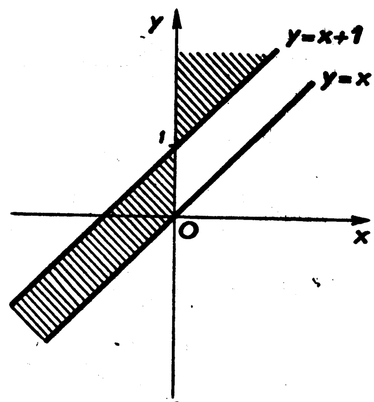
3002. Deo prostora između sfera $x^2+y^2+z^2=r^2$ i $x^2+y^2+z^2=R^2$, uključujući površinu spoljašnje i isključujući površinu unutrašnje sfere.

3003. 2. **3004.** 0. **3005.** 0.

3006. Funkcija nema granične vrednosti kad $x\to 0,\ y\to 0$.

3007. 0. **3008.** 1.

3009. a) $y=0$ ili $y=x^{\alpha}$ $(\alpha>0)$, $x\to 0$ na bilo kakav način; b) $y=\dfrac{x}{3}$, $x\to 0$ na bilo kakav način.



Sl. 83

3010. Tačka $(0,\ 0)$; u blizini ove tačke funkcija može uzimati koliko se god želi velike pozitivne vrednosti.

3011. Sve tačke sa celobrojnim koordinatama.

3012. Na pravoj $y=x$.

3013. Na pravama $x=m$, $y=n$ (m i n su celi brojevi).

3014. Na paraboli $y^2=2x$.

3015. 1) neprekidna; 2) prekidna; neprekidna posebno po x (tj. pri konstantnom y), i posebno po y (tj. pri konstantnom x); 3) neprekidna; 4) prekidna; 5) prekidna; 6) prekidna. Preći na polarne koordinate.

3016. Krugovi sa centrom u koordinatnom početku, čiji su poluprečnici respektivno $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}$.

3017. Krug koji prolazi kroz tačke A i B.

3025. Prave linije $y=ax+b$, pri čemu je $a=\ln b$.

3026. Koncentrične sfere sa zajedničkim centrom u tački A, čiji su poluprečnici respektivno 1, 2, 3, 4.

3027. Obrtni elipsoidi čije su žiže u tačkama A i B:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}=\text{const.}$$

3028. Sfere $x^2+y^2+z^2=\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^2$ gde je $c>1$.

3029. Obrtni paraboloidi $x^2+y^2=cz$.

3030. 1) Ravni $2x+3y-z=C$; 2) obrtni hiperboloidi ili konus $x^2+y^2-2z^2=C$.

3032. $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$ za $T=T_0$.

3033. $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ — brzina menjanja temperature u datoj tački; $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ — brzina menjanja temperature u odnosu na dužinu (duž štapa), u datom trenutku vremena.

3034. $\frac{\partial S}{\partial h}=b$ — brzina menjanja površine u zavisnosti od visine pravougaonika; $\frac{\partial S}{\partial h}=h$ — brzina menjanja površine u zavisnosti od osnovice pravougaonika.

3036. $\frac{\partial z}{\partial x}=1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-1.$ **3037.** $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3;\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x.$

3038. $\frac{\partial\theta}{\partial x}=ae^{-t};\ \frac{\partial\theta}{\partial t}=-axe^{-t}+b.$

3039. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2};\ \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}+\frac{1}{u}.$

3040. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2};$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

3041. $\frac{\partial z}{\partial x}=30xy(5x^2y-y^3+7)^2;$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3(5x^2y-y^3+7)^2(5x^2-3y^2).$$

3042. $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-\frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$

3043. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$.

3044. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$.

3045. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$.

3046. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

3047. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

3048. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

3049. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$.

3050. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$.

3051. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$.

3052. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$.

3053. $\frac{\partial u}{\partial v}=-\frac{w}{v^2+w^2}$; $\quad \frac{\partial u}{\partial w}=\frac{v}{v^2+w^2}$.

3054. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.

3055. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{x}^{-\frac{y}{x}}\ln 3$.

3056. $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xy(1+xy)^{y-1}+(1+xy)^y\ln(1+xy)$.

3057. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$.

3058. $\frac{\partial z}{\partial x}=x^{x^y}x^{y-1}(y\ln x+1)$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y x^{x^y}\ln^2 x$

3059. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz$; $\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xz$; $\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy$.

3060. $\frac{\partial u}{\partial x}=y+z;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x+z;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=x+y.$

3061. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

3062. $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+3y-1;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=z^2+3x;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2yz+1.$

3063. $\frac{\partial w}{\partial x}=yz+vz+vy;\quad \frac{\partial w}{\partial y}=xz+zv+vx;$

$\frac{\partial w}{\partial z}=xy+yv+vx;\quad \frac{\partial w}{\partial v}=yz+xz+xy.$

3064. $\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)\,e^{x(x^2+y^2+z^2)};$

$\frac{\partial u}{\partial y}=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2xz\,e^{x(x^2+y^2+z^2)}.$

3065. $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2+z^2);\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2+z^2);$

$\frac{\partial u}{\partial z}=2z\cos(x^2+y^2+z^2).$

3066. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}.$

3067. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x;$

$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x.$

3068. $\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=y^z x^{y^z}\ln x\ln y.$

3069. $\frac{2}{5},\ \frac{1}{5}.$ 3070. $0,\ \frac{1}{4}.$

3071. $\frac{\partial z}{\partial x}=2(2x+y)^{2x+y}[1+\ln(2x+y)];$

$\frac{\partial z}{\partial y}=(2x+y)^{2x+y}[1+\ln(2x+y)].$

3072. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{x\ln y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3\ln x}{y\ln^2 y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2.$

3073. $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy);$

$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy).$

3074. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}\,2x;$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}\,2y.$

3075. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\sqrt{x^y}\ln x}{2(1+x^y)}.$

3076. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}.$

3077. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}.$

3078. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{xy-x-y}{xy+x+y}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}\sqrt{\dfrac{xy-x-y}{xy+x+y}}.$

3079. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\dfrac{y}{x}\right)^2+2\operatorname{arctg}^3\dfrac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\dfrac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)^2};$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\dfrac{y}{x}\right)^2+2\operatorname{arctg}^3\dfrac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\dfrac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)^2}.$

3080. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{4kx}{(x^2+y^2+z^2)^3};\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{4ky}{(x^2+y^2+z^2)^3};$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{4kz}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$

3081. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}};\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}};$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$

3082. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz(\sin x)^{yz-1}\cos x;\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=z(\sin x)^{yz}\ln\sin x;$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=y(\sin x)^{yz}\ln\sin x.$

3083. $\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{x}=\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{y}=\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial z}}{z}=\dfrac{2}{r(r^2-1)}$, gde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3084. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=(2xy^2-yzv)\operatorname{tg}^3\alpha;\quad \dfrac{\partial w}{\partial y}=(2x^2y-xzv)\operatorname{tg}^3\alpha;\quad \dfrac{\partial w}{\partial z}=(2zv^2-xyv)\operatorname{tg}^3\alpha;$

$\dfrac{\partial w}{\partial v}=(2z^2v-xyz)\operatorname{tg}^3\alpha$, gde je $\alpha=x^2y^2+z^2v^2-xyzv$.

3085. 4. 3086. $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{z=b\\t=a}}=\frac{3b}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$;

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\substack{z=b\\t=a}}=-\frac{3a}{3}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}};$$

3087. 1 i -1. 3088. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3089. $\frac{3}{2}$. 3090. $\frac{13}{22}$. 3091. 45°.

3092. 30°. 3093. $\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$.

3094. $d_x z=(y^3-6xy^2)\,dx$; $d_y z=(3xy^2-6x^2y+8y^3)\,dy$.

3095. $d_x z=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $d_y z=\frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3096. $d_x z=\frac{y(y^2-x^2)\,dx}{(x^2+y^2)^2}$; $d_y z=\frac{x(x^2-y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$.

3097. $d_x u=\frac{3x^2\,dx}{x^3+2y^3-z^3}$; $d_y u=\frac{6y^3\,dy}{x^3+2y^3-z^3}$; $d_z u=\frac{-3z^2\,dz}{x^3+2y^3-z^3}$.

3098. $\frac{1}{270}$. 3099. $\approx 0{,}0187$. 3100. $\frac{97}{600}$.

3101. $xy\,[(2y^3-3xy^2+4x^2y)\,dx+(4y^2x-3yx^2+2x^3)\,dy]$.

3102. $\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$. 3103. $\frac{2(x\,dy-y\,dx)}{(x-y)^2}$. 3104. $\frac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$

3105. $(x\,dy+y\,dx)\cos(xy)$. 3106. $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$.

3107. $\frac{4xy(x\,dy-y\,dx)}{(x^2-y^2)^2}$. 3108. $\frac{x\,dy+y\,dx}{1+x^2y^2}$.

3109. $x^{zy-1}(yz\,dx+zx\ln x\,dx+xy\ln x\,dz)$, 3110. 0,08. 3111. $0{,}25\,e$.

3112. $\frac{1}{36}$. 3113. $\approx 7{,}5$. 3114. $\approx 0{,}005$. 3115. $\approx 1{,}08$. 3116. 5.

3117. $1{,}8\pm 0{,}2$. 3118. 4730 ± 100.

3119. $2\delta_a+\frac{\delta_B B\sin C}{\sin B\sin(B+C)}+\frac{\delta_C C\sin B}{\sin C\sin(B+C)}$.

3120. Raste brzinom od $444\ cm^2/sec$. 3121. Na $\approx 2575\ cm^3$.

3123. $dr=\frac{s}{p}\,ds+\left(\frac{1}{2}-\frac{s^2}{2p^2}\right)dp=0{,}16\ cm$, tj. oko 1%.

3124. $e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$. 3125. $\sin 2t+2e^{2t}+e^t(\sin t+\cos t)$.

3126. $\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$. 3127. $\frac{\partial z}{\partial u}=3u^2\sin v\cos v(\cos v-\sin v)$;

$$\frac{\partial z}{\partial v}=u^3(\sin v+\cos v)(1-3\sin v\cos v).$$

3128. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=2\dfrac{u}{v^2}\ln(3u-2v)+\dfrac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$;

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}.$$

3129. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{e^x}{e^x+e^y}$; $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{e^x+3e^{x^3}x^2}{e^x+e^{x^3}}$.

3130. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$. 3131. $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

3132. $\dfrac{dz}{dt}=\left(3-\dfrac{4}{t^3}-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2\left(3t+\dfrac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)$.

3133. $\dfrac{du}{dx}=e^{ax}\sin x$.

3134. $dz=\dfrac{y^2dx+x^2dy}{(x+y)^2}\operatorname{arctg}(xy+x+y)+\dfrac{xy[(y+1)dx+(x+1)dy]}{(x+y)[1+(xy+x+y)^2]}$.

3135. $\dfrac{e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}}{x^2y^2}[(y^4-x^4+2xy^3)x\,dy+(x^4-y^4+2x^3y)y\,dx]$.

3136. $\left.\begin{aligned}\dfrac{\partial z}{\partial x}&=2x\dfrac{\partial f}{\partial u}+ye^{xy}\dfrac{\partial f}{\partial v}.\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}&=-2y\dfrac{\partial f}{\partial u}+xe^{xy}\dfrac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&u=x^2-y^2;\\ &v=e^{xy}.\end{aligned}$

3145. $\dfrac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$. 3146. $\dfrac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}$. 3147. $\dfrac{ye^{xy}-ye^x-e^y}{xe^y+e^x-xe^{xy}}$.

3148. $-\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{2(x^2+y^2)-a^2}{2(x^2+y^2)+a^2}$. 3149. $\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{2x+e^{xy}-\cos xy}{\cos xy-e^{xy}-x}$.

3150. $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$. 3151. $\dfrac{y^2}{1-xy}$. 3152. $\dfrac{a^2}{(x+y)^2}$. 3153. $\dfrac{2y}{x(y-1)}$.

3154. $\dfrac{y}{y-1}$. 3155. $\dfrac{y^2}{x^2}\,\dfrac{\ln x-1}{\ln y-1}$.

3157. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=6\\y=2}}=\dfrac{4}{3}$; $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=6\\y=8}}=-\dfrac{4}{3}$; tangente kruga u tim tačkama zaklapaju sa x-osom jednake uglove.

3158. -1. 3161. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{c^2x}{a^2z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{c^2y}{b^2z}$.

3162. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2-x}{z+1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{z+1}$.

3163. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{yz}{xy+z^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{zx}{xy+z^2}$.

3164. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x(z-1)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y(z-1)}$.

3167. $dz=-\frac{\sin 2x\,dx+\sin 2y\,dy}{\sin 2z}$. 3168. $z=\frac{x^2-y^2}{4}$.

3169. $z=\frac{3xy-x^3}{2}$. 3170. $z=k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. 3171. $dz=\frac{x\,dx}{z}-\frac{y\,dy}{z}$.

3172. $dz=\frac{x\,dx}{a}+\frac{y\,dy}{a}$. 3173. $dz=\sqrt{z}(x\,dx-y\,dy)$.

3174. $dz=e^{-u}[(v\cos v-u\sin v)\,dx+(u\cos v+v\sin v)\,dy]$.

3176. $2(x\,dx+y\,dy)$. 3177. $2(x\,dx+y\,dy)$.

3185. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3186. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{(x^2+y^2)^2}}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3187. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$.

3188. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(ax+by)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos 2(ax+by)$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2ab\cos 2(ax+by)$.

3189. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{xe^y+2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(1+xe^y)\,e^{xe^y+y}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=(1+xe^y)\,e^{xe^y+y}$.

3190. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4x}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$.

3191. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\ln y(\ln y+1)}{x^2}e^{\ln x\ln y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}e^{\ln x\ln y}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\ln x\ln y+1}{xy}e^{\ln x\ln y}$.

3192. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.

3193. $\dfrac{(x-z)\,y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xz)^3}}$. 3194. $2y^3(2+xy^2))\,e^{xy^2}$.

3195. $\dfrac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$. 3196. $-x(2\sin xy+xy\cos xy)$.

3197. $(x^2y^2z^2+3xyz+1)\,e^{xyz}$.

3198. $mn(n-1)(n-2)\,p\,(p-1)\,x^{m-1}y^{n-3}z^{p-2}$. 3204. $a=-3$.

3209. $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}=$$

$$=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

3219. $-2y\,dx^2+4(y-x)\,dx\,dy+2x\,dy^2$. 3220. $-\dfrac{(dx-dy)^2}{(x-y)^2}$.

3221. $\dfrac{(3x^2-y^2)\,dx^2+8xy\,dx\,dy+(3y^2-x^2)\,dy^2}{(x^2+y^2)^3}$.

3222. $2\sin 2y\,dx\,dy+2x\cos 2y\,dy^2$. 3223. $e^{xy}[(y\,dx+y\,dy)^2+2\,dx\,dy]$.

3224. $2(z\,dx\,dy+y\,dx\,dz+x\,dy\,dz)$.

3225. $-\cos(2x+y)(2\,dx+dy)^3$; $(2\,dx+dy)^3$; 0.

3226. $-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$.

3227. $-\dfrac{c^4}{z^3}\left[\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\dfrac{dx^2}{a^2}+\dfrac{2xy}{a^2b^2}\,dx\,dy+\left(\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\dfrac{dy^2}{b^2}\right]$.

3228. $\dfrac{2z[xy^3\,dx^2+(x^2y^2+2xyz^2-z^4)\,dx\,dy+x^3y\,dy^2]}{(z^2-xy)^3}$.

3229. $-31{,}5\,dx^2+206\,dx\,dy-306\,dy^2$. 3230. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y$.

3231. $y''-5y'+y$. 3232. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+ay$. 3233. $y-x''$ 3234. $-\dfrac{x''}{x'^3}$.

3235. $-\dfrac{v''+2v}{v^3}$. 3236. $\dfrac{d\rho}{d\varphi}-\rho$. 3237. $\dfrac{2\rho'^2-\rho\rho''+\rho^2}{(\rho'^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3238. $-\dfrac{\partial z}{\partial v}$. 3239. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$.

3240. $\omega''(r)+\dfrac{1}{r}\,\omega'(r)+k\,\omega(r)$. 3241. $-4\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2$.